

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ 04.02.2006

CLASA a-XII-a

SUBIECTELE :

1. Fie G un grup finit cu n elemente ($n \geq 2$) și m cel mai mare divizor al lui n diferit de n .

Fie $A \subset G$, $A \neq \emptyset$ și $H = \{x \in G / ax = xa, \forall a \in A\}$.

a) Să se arate că H este subgrup al lui (G, \cdot) ;

b) Dacă $\text{ord}(H) > m$, atunci $H = G$;

c) Dacă $\text{card}(A) > m$ și $\text{ord}(H) > m$ atunci G este comutativ.

Gazeta Matematică 6/2005

N.Pavelescu(prelucrare)

2. Fie $m, n \in \mathbf{N}$, $m > 1$ și $n > 1$ iar (G_1, o) și $(G_2, *)$ două grupuri astfel încât $\text{ord}(G_1) = m$ și $\text{ord}(G_2) = n$.

a) Dacă $(m, n) = 1$ atunci arătați că singurul morfism de grupuri de la G_1 la G_2 este morfismul nul .

b) Dacă $(m, n) \neq 1$ atunci există 2 grupuri G_1 și G_2 astfel încât $\text{ord}(G_1) = m$, $\text{ord}(G_2) = n$ și un morfism nenul de grupuri de la G_1 la G_2 .

c) Arătați că singurul morfism de la (S_3, o) la $(\mathbf{Z}_3, +)$ este morfismul nul.

Prof. Gheorghe Alexe, Brăila

3. Fie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$ și F primitiva lui f cu proprietatea $F(0) = 0$.

a) Calculați $F(x)$ pentru $x \in [0, 2\pi]$.

b) Cercetați dacă există $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

D.M. Bătinețu

4. Pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ considerăm funcția $f_n(x) = \sum_{k=0}^n |x - k|$ și $F_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o primitivă a

funcției f_n . Să se calculeze :

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n(1) - F_n(0)}{n^2}$;

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F_n(x) - F_n(0)}{x^2}$.

Prof. Dan Negulescu, Braila

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timpul de lucru este de 3 ore.